MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N}$ $=\{1,2,3,...,\}$: conjunto de números naturais.
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos.
i : unidade imaginária $i^2 = -1$.
[a, b] $=\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$.
$\overline{AB}$: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
$A\hat{O}B$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, com vértice no ponto O.
$C \cup D$ = união entre os conjuntos C e D.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01

Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1, 1)$, $Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$. Determine:

a) A equação de λ

b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ, sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Comentário:

$P(1, 1)$ $Q(13, 1)$ $R(7, 9)$

a) Substituindo os três pontos na equação geral de λ, de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r, temos:

$$\begin{cases} (1-x_c)^2 + (1-y_c)^2 = r^2 & \text{(I)} \\ (13-x_c)^2 + (1-y_c)^2 = r^2 & \text{(II)} \\ (7-x_c)^2 + (9-y_c)^2 = r^2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II):

$$(1-x_c)^2 = (13-x_c)^2 \Rightarrow 1 - x_c = 13 - x_c \text{ ou } 1 - x_c = x_c - 13$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 = 13}_{\text{absurdo}} \text{ ou } \boxed{x_c = 7}$$

Substituindo nas equações:

$$\begin{cases} 36 + (1-y_c)^2 = r^2 & \text{(IV)} \\ 0 + (9-y_c)^2 = r^2 & \text{(V)} \end{cases}$$

Fazendo (IV) – (V):

$$36 + (1-y_c)^2 = (9-y_c)^2 \Leftrightarrow 36 + 1 - 2y_c + \cancel{y_c^2} = 81 - 18y_c + \cancel{y_c^2} \Leftrightarrow$$

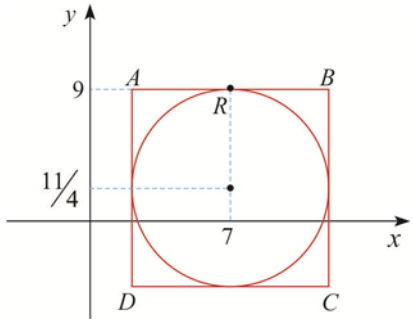
$$16y_c = 44 \Leftrightarrow \boxed{y_c = \frac{11}{4}}$$

Substituindo em (V):

$$\left(9 - \frac{11}{4}\right)^2 = r^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$$

Logo, a equação de λ é $\boxed{(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2}$

b)



$$d_{A,R} = d_{B,R} = R = \left(\frac{25}{4}\right)$$

Logo, $x_A = 7 - \frac{25}{4} = \frac{3}{4}$

$$x_B = 7 + \frac{25}{4} = \frac{53}{4}$$

$$y_A = y_B = 9$$

Então

$$\boxed{A\left(\frac{3}{4}, 9\right)}$$

$$\boxed{B\left(\frac{53}{4}, 9\right)}$$

Vamos encontrar C e D.

$x_D = x_A = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $y_C = y_D = \frac{11}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$

$$x_C = x_B = \frac{53}{4}$$

Portanto,

$$\boxed{C\left(\frac{53}{4}, -\frac{7}{2}\right)}$$

$$\boxed{D\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{2}\right)}$$

Questão 02

Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

Comentário:

Vamos contar o total de casos que geram a soma das três faces igual a 9. Sejam D_1, D_2 e D_3 os resultados em cada dado.

Temos um total de 25 casos cuja soma $D_1 + D_2 + D_3$ é 9.

Desses 25 casos, o número de casos em que D_1, D_2 e D_3 são ímpares (marcados com *) é 7.

Portanto a probabilidade pedida é $\boxed{\frac{7}{25}}$.

D_1	D_2	D_3	
6	1	2	
6	2	1	
5	1	3	*
5	2	2	
5	3	1	*
4	1	4	
4	2	3	
4	3	2	
4	4	1	
3	1	5	*
3	2	4	
3	3	3	*
3	4	2	
3	5	1	*
2	1	6	
2	2	5	
2	3	4	
2	4	3	
2	5	2	
2	6	1	
1	2	6	
1	3	5	*
1	4	4	
1	5	3	*
1	6	2	

Questão 03

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

Comentário:

Seja p primo.
Queremos que existam a e b naturais tais que $p = a^3 + b^3$
Mas $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.
Logo, $p = a^3 + b^3 = (a+b)\left((a+b)^2 - 3ab\right) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Notemos que $a + b > 0$ e $a^2 - ab + b^2 > 0$ (pois $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab > ab$) , já que a e b são positivos.

Como p é primo, necessariamente um dos fatores $(a + b)$ e $(a^2 - ab + b^2)$ deve ser 1 e o outro igual a p.
Se $a + b = 1$, temos um absurdo, já que a e b são naturais (maiores ou iguais a 1).
Então $a^2 - ab + b^2 = 1$.
$a^2 - ab + (b^2 - 1) = 0$. Vamos resolver a equação de 2° grau em a
$\Delta = b^2 - 4(b^2 - 1) = 4 - 3b^2$

Para existir raiz $a \in \mathbb{N}$, temos que $4 - 3b^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \leq \frac{4}{3}$

Como $b \in \mathbb{N}$, temos que $\boxed{b = 1}$.

Então $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

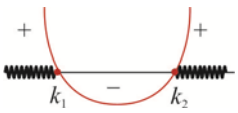
Portanto, $p = a^3 + b^3 = 1 + 1 = 2$.
Logo, $p = 2$ é o único primo que é a soma de dois perfeitos. Então, o subconjunto desejado é $\{2\}$.

Questão 04

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola
$y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

Comentário:

$y = kx$ intersecta $y = x^2 + ax + b \Leftrightarrow k \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$
Para encontrarmos a interseção entre a reta e a parábola, igualamos as expressões de y:
$kx = x^2 + ax + b$
$x^2 + ax - kx + b = 0$
$x^2 + (a - k)x + b = 0$
$\Delta = (a - k)^2 - 4b$
Para existir interseção, $\Delta \geq 0$. Logo:
$a^2 - 2ak + k^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow k^2 - 2ak + (a^2 - 4b) \geq 0$



A solução da inequação em k é $(-\infty, k_1] \cup [k_2, +\infty)$, onde k_1 é a menor raiz e k_2 é a maior raiz de $k^2 - 2ak + (a^2 - 4b) = 0$.
Pelo enunciado, sabemos que $k_1 = 2$ e $k_2 = 6$.

Mas, por outro lado, as raízes são $\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 16b}}{2} = a \pm \sqrt{4b} = a \pm 2\sqrt{b}$.

Portanto, $\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 6 \\ a - 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 4 \\ b = 1 \end{matrix}}$

Questão 05

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^6-10x^4-4x^3+25x^2+20x+28.$

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x)=(x^3-5x+\alpha)^2+\beta.$

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x\in\mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

Comentário:

a)

$f(x)=(x^3-5x+\alpha)^2+\beta$

$f(x)=x^6+25x^2+\alpha^2-10x^4+2\alpha x^3-10\alpha x+\beta$

Pela igualdade polinomial, $\alpha=-2$ e $\beta=24$

Resposta: $f(x)=(x^3-5x-2)^2+24$

b) e c): Como x é Real, então $(x^3-5x-2)^2\geq 0.$

Tentaremos zerar esse termo:

$x^3-5x-2=0\Rightarrow -2$ é raiz

Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

	1	0	-5	-2
-2	1	-2	-1	0

$(x+2)(x^2-2x-1)=0\Rightarrow$ raízes $-2,1\pm\sqrt{2}.$

Então conclui-se:

b) $f_{MIN}(x)=24$

c) $x=-2,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$

Questão 06

Seja $z\in\mathbb{C}$ uma raiz da equação $4z^2-4z\,sen\,\alpha+1=0,$ para $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Determine, em função de α, todos os possíveis valores para:

a) $2z+\dfrac{1}{2z}.$

b) $(2z)^{15}+\dfrac{1}{(2z)^{15}}.$

Comentário:

Seja a equação $4z^2-(4\,sen\,\alpha)z+1=0.$

O Δ da equação será: $\Delta=16\,sen^2\alpha-16$

$\sqrt{\Delta}=4\sqrt{sen^2\alpha-1}$

Como $sen^2\alpha\leq 1,$ *então* $\sqrt{\Delta}=4\cdot\sqrt{1-sen^2\alpha}\,i=4\cdot|\cos\alpha|\,i$

Como $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sqrt{\Delta}=4\cos\alpha\,i$

Então:

$$z=\frac{sen\alpha\pm\cos\alpha\,i}{2}\Rightarrow 2z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\pm sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)i.$$

$$\text{então } 2z=Cis\left[\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

a)

Como $Cis\,x=\dfrac{1}{Cis(-x)}$, só há um valor possível:

$$2z+\frac{1}{2z}=Cis\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+Cis\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\boxed{2\,sen\,\alpha}$$

b) Analogamente:

$$(2z)^{15}+\frac{1}{(2z)^{15}}=Cis\left(\frac{15\pi}{2}-15\alpha\right)+Cis\left[-\left(\frac{15\pi}{2}-15\alpha\right)\right]$$

$$=2\cdot\cos\left(\frac{15\pi}{2}-15\alpha\right)=\boxed{-2sen15\alpha}$$

Questão 07

Seja H o hexágono no plano de Argand-Gauss cujos vértices são as raízes do polinômio $p(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^6+64$. Determine $z\in\mathbb{C}$ sabendo que o conjunto $M=\{zx\in\mathbb{C}:x\in H\}$ é o hexágono que possui $v_1=-1+\sqrt{3}i$, $v_2=1-\sqrt{3}i$ e $v_3=5-\sqrt{3}i$ como três vértices consecutivos.

Comentário 1:

$p(x)=(x-\sqrt{3})^6+64\rightarrow$ vértices formam H

$M=\{zx\in\mathbb{C}:x\in M\}$

$v_1=-1+\sqrt{3}i$

$v_2=1-\sqrt{3}i$ $\qquad v_1,v_2,v_3\in M$

$v_3=5-\sqrt{3}i$

Vamos achar as raízes de $p(x)$:

$$(x-\sqrt{3})^6=-64=-(2^6)=(2i)^6=\left(2cis\frac{\pi}{2}\right)^6=2^6cis3\pi$$

$$x-\sqrt{3}=2cis\left(3\pi+\frac{2k\pi}{6}\right)$$

$$x-\sqrt{3}=\begin{cases}2i\\-\sqrt{3}+i\\-\sqrt{3}-i\\-2i\\\sqrt{3}-i\\\sqrt{3}+i\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt{3}+2i\\i\\-i\\\sqrt{3}-2i\\2\sqrt{3}-i\\2\sqrt{3}+i\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Seja A o conjunto das raízes de $p(x)$. $A=\left\{\sqrt{3}+2i,\,i,\,-i,\,\sqrt{3}-2i,\,2\sqrt{3}-i,\,2\sqrt{3}+i\right\}$

Notemos que v_1 e v_2 , consecutivos, possuem a seguinte propriedade $v_2=-v_1$.

Mas $v_2=zx_2$ e $v_1=zx_1$, para x_1 e x_2 raízes de $p(x)$, ou seja, $x_1,\,x_2\in A$.

Como $v_2=-v_1$, temos que $zx_2=-zx_1\Rightarrow x_2=-x_1$.

Em A só temos duas raízes que satisfazem $x_2=x_1$, que são i e $-i$. E então $x_3=\sqrt{3}-2i$ (próxima raiz).

$Logo,\ v_1=zi$

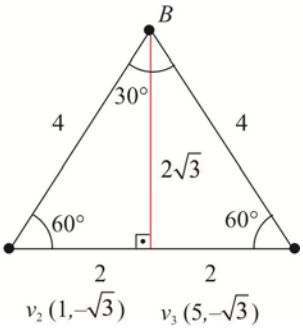
$$v_1=zi\Leftrightarrow-1+\sqrt{3}i=zi\Leftrightarrow\boxed{z=\sqrt{3}+i}\Rightarrow v_3=(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-2i)=5-\sqrt{3}i$$

Comentário 2:

O hexágono formado pelas raízes de $p(x)$ tem centro $A(\sqrt{3},0)$.

Como M representa uma transformação linear nos complexos, o centro do hexágono também obedecerá à transformação.

Analisando v_2 e v_3 :



As coordenadas do centro B serão:

$B\left(1+2,-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=B\left(3,\sqrt{3}\right)$

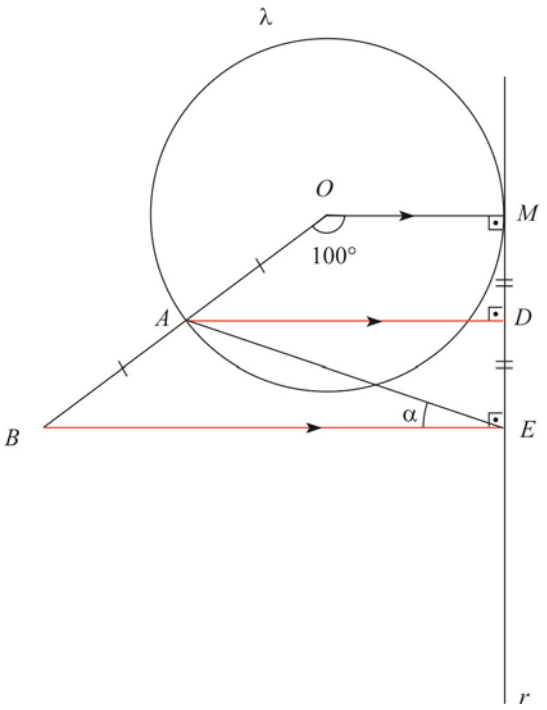
Então: $\vec{B}=z\cdot\vec{A}\Rightarrow3+\sqrt{3}i=z\cdot\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{z=\sqrt{3}+i}$

Resposta: O complexo z será $z=\sqrt{3}+i$

Questão 08

Considere a circunferência λ de centro O passando por um ponto A. Sejam B um ponto tal que A é o ponto médio de $\overline{OB}$ e M um ponto de λ tal que $A\hat{O}M = 100°$. Seja r a reta tangente à λ passando por M. Seja $\overline{DE}$ a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r. Determine, em graus, a medida do ângulo $A\hat{E}B$.

Comentário:



Seja $A\hat{E}B = \alpha$

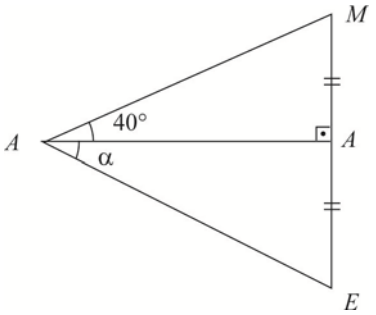
Como $\overline{OM}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são perpendiculares a r, então $OM // AD // BE$, pelo Teorema de Tales, como $\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = 1$, *então* $\overline{DM} = \overline{DE}$.

Além disso, $E\hat{A}D = \alpha$.

Como OM também é raio, $\overline{AO} = \overline{OM}$ e o triângulo ΔAMO é isósceles de ângulos 40°, 40° e 100°.

Como $O\hat{A}D = 80°$, então $M\hat{A}D = 40°$.

Analisando o triângulo ΔAEM:



Como $\overline{AD}$ é mediana e altura, então ΔAEM é isósceles, e $\overline{AD}$ também será bissetriz.

Então $\boxed{\alpha = 40°}$.

Questão 09

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

Comentário:

Inicialmente, percebe-se que, para x raiz, $x^3 = 3^2 + k$. Como $x^2 \geq 0$ *e* $k \geq 0$, então a raiz inteira tem que ser maior ou igual a zero.

Testando as raízes:

(1) $x = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \Rightarrow k = 0.$

então $p(x) = x^3 - x^2$, cujas raízes são $0, 0, 1$. (Abs!Pois só pode ter uma raiz inteira)

(2) $x = 1 \Rightarrow p(1) = 0 \Rightarrow k = 0$ (Abs!)

(3) $x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow k = 4$

$p(x) = x^3 - x^2 - 4,$

cujas raízes são $2, \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$ (Ok!)

(4) $x = 3 \Rightarrow p(3) = 0 \Rightarrow k = 18$

$p(x) = x^3 - x^2 - 18,$

cujas raízes são $3, -1 \pm \sqrt{5} i$ (Ok!)

(5) $x = 4 \Rightarrow p(4) = 0 \Rightarrow k = 48$

$p(x) = x^3 - x^2 - 48,$

cujas raízes são $4, \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2} i$ (Ok!)

(6) $x = 5 \Rightarrow p(5) = 0 \Rightarrow k = 100$

$p(x) = x^3 - x^2 - 100,$

cujas raízes são $5, -2 \pm 4i$ (Ok!)

(7) $x = 6 \Rightarrow p(6) = 0 \Rightarrow k = 180$

$p(x) = x^3 - x^2 - 180,$

cujas raízes são $6, \frac{-5}{2} \pm \frac{\sqrt{95}}{2} i$ (Ok!)

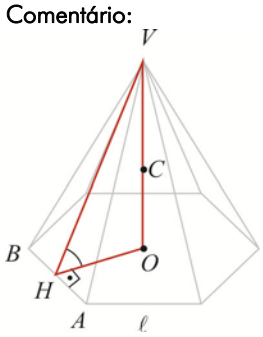
A partir de $x = 7, o\ k$ será maior que 200.

Resposta: Os valores inteiros de k que satisfazem serão 4, 18, 48, 100 e 180.

Questão 10

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de 75° com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

Comentário:



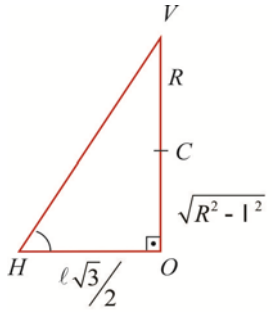
Sejam O o centro do hexágono da base, V o vértice da pirâmide, A e B dois vértices conforme figura, H o pé da altura de O para o lado AB e C o centro da esfera circunscrita à pirâmide. Seja R o raio da esfera.

Sabemos que a base é um hexágono regular de lado l. Portanto o triângulo OBA é equilátero de lado l. Com isso, temos que $\overline{OH} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Como a esfera é circunscrita à pirâmide, temos que $\overline{CV} = R = \overline{CA}$.

No triângulo COA, fazendo Pitágoras, temos que $\overline{CA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{CO}^2 \Leftrightarrow R^2 = l^2 + \overline{CO}^2 \Leftrightarrow \overline{CO} = \sqrt{R^2 - l^2}$

Destacando o triângulo VOH, temos:



$$tg\,75° = (\sqrt{3} + 2) = \frac{R + \sqrt{R^2 - l^2}}{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\frac{l\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 2) = R + \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\frac{l}{2}(3 + 2\sqrt{3}) = R + \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\frac{l}{2}(3 + 2\sqrt{3}) - R = \sqrt{R^2 - l^2}$$

Elevando os dois lados ao quadrado: $\frac{l^2}{2}(9 + 12\sqrt{3} + 12) - Rl(3 + 2\sqrt{3}) + \cancel{R^2} = \cancel{R^2} - l^2$

Logo,

$$R\cancel{l} = \frac{l^{\cancel{2}}}{4} \cdot \frac{(25 + 12\sqrt{3}}{(3 + 2\sqrt{3})} \Leftrightarrow R = \frac{l}{4} \cdot \frac{(25 + 12\sqrt{3})}{(3 + 2\sqrt{3})} \cdot \frac{(3 - 2\sqrt{3})}{(3 - 2\sqrt{3})} =$$

$$\frac{l}{4} \cdot \frac{(75 - 50\sqrt{3} + 36\sqrt{3} - 72)}{(9 - 12)} = \frac{l}{4} \cdot \frac{(14\sqrt{3} - 3)}{3}$$

Portanto, $\boxed{R = \frac{l(14\sqrt{3} - 3)}{12}}$

QUÍMICA

Constantes

Constante de Avogadro (N_A)	$= 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Faraday (F)	$= 9{,}65 \times 10^4$ C mol^{-1} $= 9{,}65 \times 10^4$ A s mol^{-1} $= 9{,}65 \times 10^4$ J V^{-1} mol^{-1}
Volume molar de gás ideal	= 22,4 L (CNTP)
Carga elementar	$= 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Constante dos gases (R)	$= 8{,}21 \times 10^{-2}$ atm L K^{-1} mol^{-1} = 8,31 J K^{-1} mol^{-1} = 1,98 cal K^{-1} mol^{-1}
Constante gravitacional (g)	= 9,81 m s^{-2}
Constante de Planck (h)	$= 6{,}63 \times 10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}
Velocidade da luz no vácuo	$= 3{,}0 \times 10^8$ m s^{-1}
Número de Euler (e)	= 2,72

Definições

Pressão: 1 atm = 760 mmHg = $1{,}01325 \times 10^5$ N m^{-2} = 760 Torr = 1,01325 bar
Energia: 1 J = 1 N m = 1 kg m^2 s^{-2} = $6{,}24 \times 10^{18}$ eV
Condições normais de temperatura e pressão (CNTP): 0º C e 760 mmHg
Condições ambientes: 25° C e 1 atm
Condições-padrão: 1 bar; concentração das soluções = 1 mol L^{-1} (rigorosamente: atividade unitária das espécies); sólido com estrutura cristalina mais estável nas condições de pressão e temperatura em questão.
(*s*) = sólido. (ℓ) = líquido. (*g*) = gás. (*aq*) = aquoso. (*conc*) = concentrado. (*ua*) = unidades arbitrárias.
(*u.m.a.*) = unidade de massa atômica. [*X*] = concentração da espécie química *X* em mol L^{-1}
ln X = 2,3 log X

Massas Molares

Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol^{-1})	Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol^{-1})
H	1	1,01	*S*	16	32,06
C	6	12,01	*K*	19	39,10
N	7	14,01	*Cr*	24	52,00
O	8	16,00	*Fe*	26	55,85
Na	11	22,99	*Zn*	30	65,38
Cl	17	34,45	*I*	53	126,90

Questão 01

Para uma reação reversível de uma etapa $2A + B \rightleftharpoons C + D$, a constante de velocidade para a reação direta k_1, é de $406\ L\ mol^{-1}\ \min^{-1}$, e a constante de velocidade para a reação inversa, k_1, é de $244\ L\ mol^{-1}\ \min^{-1}$. A energia de ativação para a reação direta é de $26{,}2\ kJ\ mol^{-1}$ ($E_{a,\ \text{direta}}$), e para a reação inversa é de $42{,}4\ kJ\ mol^{-1}$ ($E_{a,\ \text{indireta}}$).

a) Desenhe um diagrama de energia para essa reação, apresentando os valores de (i) ΔE, (ii) $E_{a,d}$, e (iii) $E_{a,i}$.

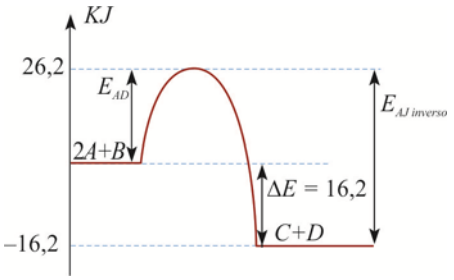
b) Discuta o efeito de elevação da temperatura na constante de velocidade direta (k_1) e inversa (k_1).

c) Calcule a constante de equilíbrio (K) e descreva o efeito de elevação de temperatura.

Comentário:

a) $2A + B \rightleftharpoons C + D$ $\quad K_1 = 406\ L \cdot mol^{-1} \cdot \min^{-1}$ $\quad E_{AT} = 26{,}2\ kJ/mol$ (Direta)

$K_2 = 244\ L \cdot mol^{-1} \cdot \min^{-1}$ $\quad E_{AT} = 42{,}4\ kJ/mol$ (Inversa)



b) $2A + B \rightleftharpoons C + D \qquad \Delta H < 0$ $\begin{cases} \text{A temperatura influencia positivamente} \\ \text{a reação direta e a reação inversa} \end{cases}$

c) Como nós temos uma reação exotérmica no sentido direto e a elevação da temperatura desloca o equilíbrio no sentido sendo, portanto, inverso, e a constante de equilíbrio K podendo ser descrita como: $K = \frac{[C][D]}{[A]^2[B]}$ teremos então um decréscimo no valor dessa constante.

$v_1 = k_1[A]^2[B]$

$v_2 = k_2[C][D]$

No equilíbrio $v_1 = v_2$ logo: $k_1[A]^2[B] = k_2[C][D]$

Como $K = \frac{[C][D]}{[A]^2[B]}$ temos que:

$\frac{K_1}{K_2} = \frac{[C][D]}{[A]^2[B]} \Rightarrow K = \frac{406}{244} \Rightarrow \boxed{K = 1{,}664}$

Questão 02

Os biodigestores possibilitam o reaproveitamento de detritos convertendo material orgânico em metano, que é utilizado como combustível em sistemas de geração de energia. Um laticínio utiliza a queima do metano para aquecer $1\ m^3/h$ de água, de $25\ °C$ a $100\ °C$ em uma caldeira que opera a $1\ atm$. Sabendo-se que 25% do calor produzido no processo é perdido e que, nessas condições, a combustão completa do metano produz água líquida, determine

a) a entalpia molar da combustão do metano;
b) a taxa de calor necessária para aquecer a água;
c) a vazão de metano, em kg/h, que deve alimentar a caldeira.

Dados: $\Delta H_f^0(CH_4(g)) = -17{,}9\ kcal\ mol^{-1}$; $\Delta H_f^0(CO_2(g)) = -94{,}1\ kcal\ mol^{-1}$; $\Delta H_f^0(H_2O(g)) = -57{,}9\ kcal\ mol^{-1}$;
$\Delta H_{eb}^0\left(H_2O(l)\right) = -10{,}5\ kcal\ mol^{-1}; c_p^0\left(H_2O(l)\right) = 1\ cal\ g^{-1}\ °C^{-1}; \rho\left(H_2O(l)\right) = 1\ g\ cm^3$

Comentário:

$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$

a) $\Delta H_C^0 = \sum \Delta H_f^0(\text{produtos}) - \sum \Delta H_f^0(\text{reagentes})$

$\Delta H_C^0 = \left[\Delta H_{f\ CO2}^0 + 2\left(\Delta H_{f\ H2O}^0\right)\right] - \left[\Delta H_{f\ CH4}^0\right]$

Lembre que $\Delta H_{f\ O2}^0 = 0$

como a questão pede a formação de $H_2O(l)$ e o dado pela questão é $H_2O(g)$, devemos fazer a conversão

$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow \cancel{H_2O}(g) \qquad \Delta H_{f\ H2O(g)}^0 = -57{,}9\ kcal/mol$

$\cancel{H_2O}(g) \rightarrow H_2O(l) \qquad \Delta H_{condensação} = -10{,}5\ kcal/mol$

$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(l) \qquad \Delta H_{f\ H2O(l)}^0 = -68{,}4\ kcal/mol$

Substituindo os valores

$\Delta H_C^0 = -213\ kcal/mol$

Caso o estudante use o dado da questão $\left(\Delta H_{EB}\left(H_2O(l)\right) = -10{,}5\ kcal/mol\right)$ o ΔH_C encontrado seria $-171\ kcal/mol$.

Cabe ressaltar que a ebulição é um processo endotérmico.

b) De acordo com o texto, por hora se aquece $1\ m^3$ de H_2O. Portanto,

$1\ g$ ___ $1\ mL$ (densidade)

x ___ $10^6\ mL$

$x = 1 \cdot 10^6\ g$

Sabe-se que, $Q = m \cdot C_P \cdot \Delta T$, logo:

$Q = 1 \cdot 10^6\ \cancel{g} \cdot 1\ cal \cdot \cancel{g^{-1}} \cdot \cancel{°C^{-1}} \cdot 75\ \cancel{°C}$

$Q = 7{,}5 \cdot 10^7\ cal$

Pelo texto, perde-se 25% do calor, ou seja, aproveita-se 75%.

Taxa necessária $= \dfrac{7{,}5 \cdot 10^7 cal}{75\%}$ para cada hora.

$\boxed{\text{Taxa necessária} = 1 \cdot 10^8 cal/hora}$

c) Cálculo da vazão do metano.

$M(CH_4) = 16\ g \cdot mol^{-1}$

$16 \cdot 10^{-3}\ kg$ _____ $213 \cdot 10^3\ \cancel{cal}$

m _____ $1 \cdot 10^8\ \cancel{cal}$

$m = 7{,}5\ kg$ para cada hora.

$\boxed{\text{vazão} = 7{,}51\ kg/hora}$

Questão 03

A obtenção de biodiesel a partir de óleos vegetais (triacilgliceróis) é uma alternativa para a produção de combustíveis menos poluentes, sendo possível catalisar a reação com um ácido ou uma base. Escreva a equação química balanceada que representa a reação

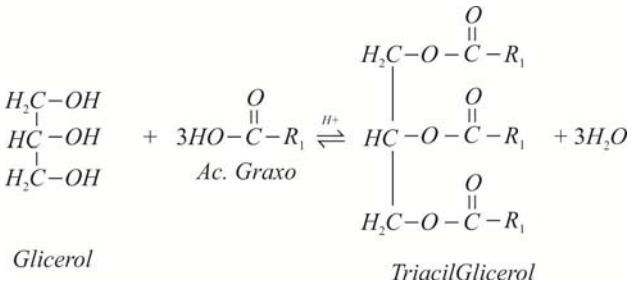
a) de obtenção de triacilglicerol a partir de glicerol e ácido graxo com cadeia alquílica representada por R_1.

b) de obtenção de biodiesel a partir do triacilglicerol obtido em (a) e etanol.

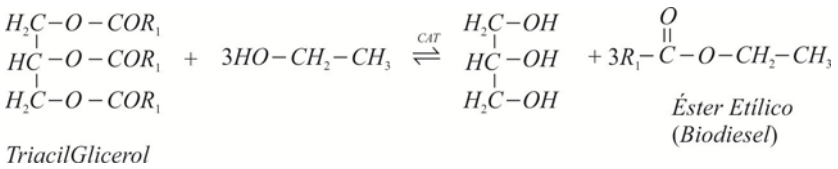
c) paralela e indesejada que poderia ocorrer se, na reação descrita em (b), fosse utilizado hidróxido de sódio como catalisador, tendo também a presença de água na reação.

Comentário:

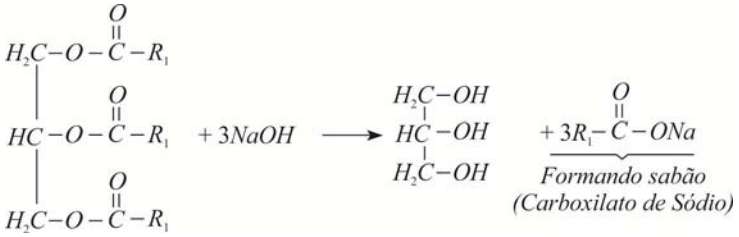
a)



b)



c)



Questão 04

Uma barra de zinco foi soldada a um tubo de ferro fundido para protegê-lo contra a corrosão, estando ambos enterrados no solo. Sabendo que uma corrente constante de $0{,}02\ A$ escoa entre os dois, responda:

a) Qual é a semirreação que ocorre na superfície da barra de zinco?

b) Como a reação descrita em (a) atua para proteger o ferro contra a corrosão?

c) Como se chama esse sistema de proteção contra a corrosão?

d) Qual deve ser a massa do metal consumida em 10 anos?

Comentário:

a) $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$

b) Evitando a oxidação do ferro:

$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$ $\qquad$ $3Zn \rightarrow 3Zn^{2+} + 6e^-$

$Fe^{2+} + 2e^- \rightarrow Fe^0$ $\qquad$ ou $\qquad$ $2Fe^{3+} + 6e^- \rightarrow 3Fe^0$

$Zn + Fe^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Fe^0$ $\qquad$ $3Zn + 2Fe^{3+} \rightarrow 3Zn^{2+} + 3Fe^0$

c) Proteção catódica.

d) $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$

$65{,}38g$ _____ $2 \cdot 96500\ C$

m _____ $6{,}3072 \cdot 10^6\ C$

$m = \dfrac{4{,}124 \cdot 10^8}{1{,}93 \cdot 10^5}$

$m = 2{,}14 \cdot 10^3\ g$

$m \cong 2140g$

$Q = i \cdot t$

$Q = 2 \cdot 10^{-2} \cdot A \cdot 10\ ano \cdot \dfrac{365\ \cancel{dia}}{1\ \cancel{ano}} \cdot \dfrac{24\ \cancel{h}}{\cancel{dia}} \cdot \dfrac{3600\ s}{\cancel{h}}$

$Q = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}1536 \cdot 10^8\ A \cdot s$

$Q = 6{,}3072 \cdot 10^6 C$

Questão 05

A partir do isótopo ${}^{x}_{y}A$ ocorrem três processos sucessivos de decaimento radioativo que levam à formação do isótopo final D. A partir de ${}^{x}_{y}A$ há emissão de uma partícula beta, produzindo o nuclídeo B. Este, por sua vez, libera uma partícula beta formando o nuclídeo C. O nuclídeo D é produzido a partir de C por meio de emissão de uma partícula alfa. Escreva as equações nucleares dessas três etapas, fornecendo os números de massa e atômico dos nuclídeos B, C e D em função de x e y. Esboce um gráfico da quantidade de cada nuclídeo em função do tempo até a produção de D e o consumo de todos os demais nuclídeos. Considere que a constante de velocidade é a mesma em todas as etapas.

Comentário:

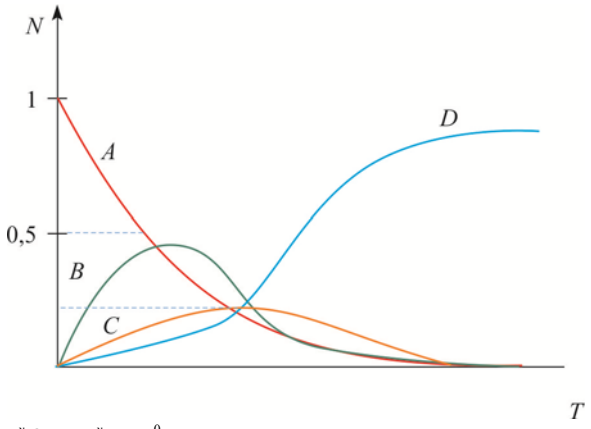
a)

${}^{x}_{y}A \rightarrow {}^{x}_{y+1}B + {}^{0}_{-1}B;$

${}^{x}_{y+1}B \rightarrow {}^{x}_{y+2}C + {}^{0}_{-1}B;$

${}^{x}_{y+2}C \rightarrow {}^{x-4}_{y}D + {}^{4}_{2}\alpha.$

b)



${}^{x}_{y}A \rightarrow {}^{x}_{y+1}B + {}^{0}_{-1}B$

${}^{x}_{y+1}B \rightarrow {}^{x}_{y+2}C + {}^{0}_{-1}B$

${}^{x}_{y+2}C \rightarrow {}^{x-4}_{y}D + {}^{4}_{+2}\alpha$

Para "A" ocorre decaimento constante!
Para "B": Formado por "A" e sofre decaimento formando "C"
Para "C": Formado por "B" e sofre decaimento formando "D"
Para "D": só há formação"

Questão 06

A reação de isomerização do cis-2-buteno para formar o isômero trans-2-buteno, que é mais estável por $4\ kJ\ mol^{-1}$, ocorre em fase gasosa em uma única etapa com energia de ativação de $264\ kJ\ mol^{-1}$. Essa reação ocorre de forma muito mais rápida quando assistida por iodo molecular em fase gasosa como catalisador. A lei de velocidade da reação catalisada é dada por

$$\text{velocidade} = k[cis-2-buteno][I_2]^{\frac{1}{2}}$$

O mecanismo proposto para a reação catalisada é baseado em cinco etapas:

I. As moléculas de iodo se dissociam para formar átomos de iodo com energia de dissociação igual a $75\ kJ\ mol^{-1}$;

II. Um dos átomos de iodo é adicionado a um dos átomos de carbono que tem ligação dupla, quebrando essa ligação para formar uma ligação simples $C-C$. O sistema molecular formado encontra-se a $118\ kJ\ mol^{-1}$ acima dos reagentes;

III. Uma das extremidades da molécula sofre torção livre em relação à outra extremidade. A energia do sistema molecular após a torção continua a $118\ kJ\ mol^{-1}$ acima dos reagentes;

IV. O átomo de iodo ligado ao carbono dissocia-se do sistema molecular intermediário e a ligação dupla é formada novamente no isômero trans. Esse processo libera $47\ kJ\ mol^{-1}$ de energia;

V. Os átomos de iodo se recombinam para formar o iodo molecular, liberando $75\ kJ\ mol^{-1}$ de energia.

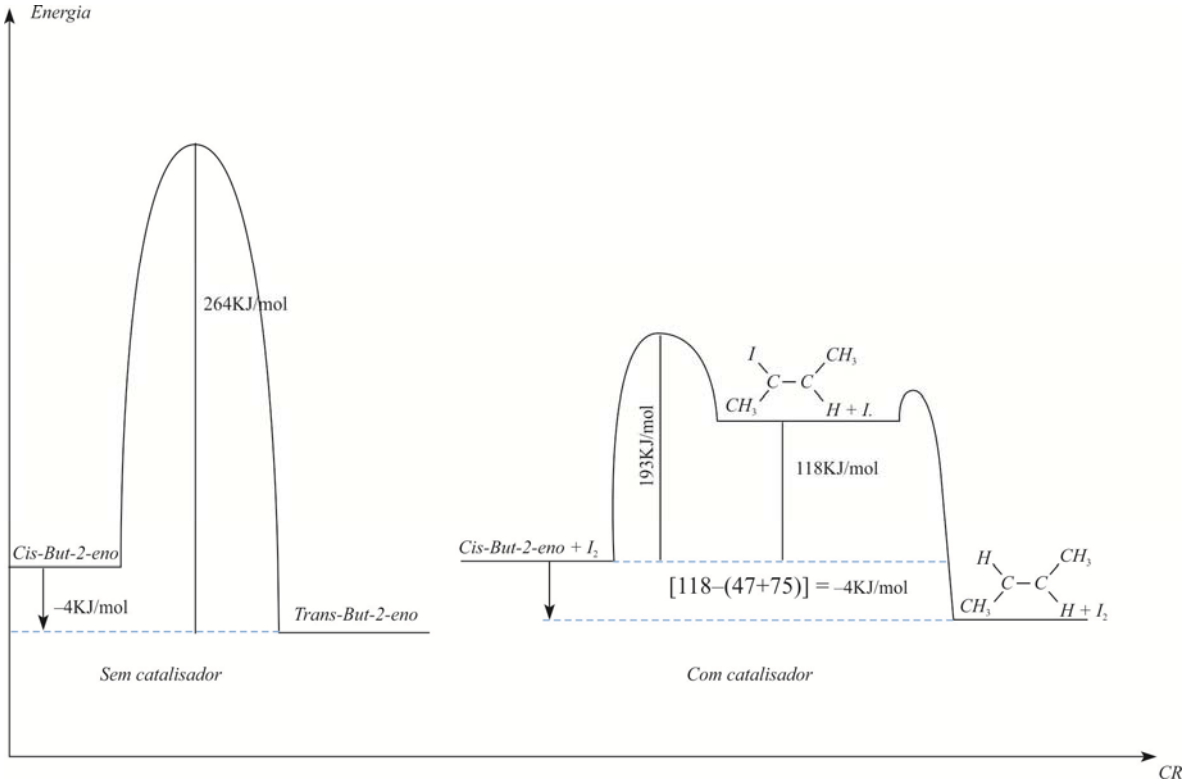
Baseado nessas informações:

a) esboce em uma mesma figura os perfis de energia para a reação de isomerização do cis-2-buteno com e sem a presença de catalisador. Deixe claro, usando diferentes notações, os dois perfis e os valores das energias envolvidas;

b) escreva as reações químicas que ocorrem em cada etapa da reação catalisada para formar a reação global.

Comentário:

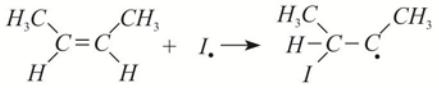
a)



b)

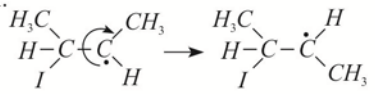
I. $I{:}I \longrightarrow 2I_{\bullet}$ $\quad \Delta E = 75\text{KJmol}^{-1}$

II.

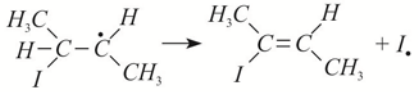


$\Delta E = +118\text{KJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

III.



IV.



$\Delta E = -47\text{KJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

V. $I_{\bullet} + I_{\bullet} \longrightarrow I_2$ $\quad \Delta E = 75\text{KJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

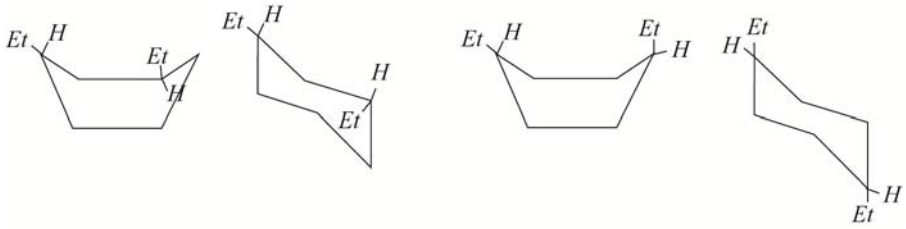
Questão 07

Considere a conformação estrutural das moléculas 1,3-dietilcicloexano, 1,4-dietilcicloexano e 2,3 diclorobutano. Pedem-se:

a) Desenhe todas as estruturas conformacionais;
b) Determine o número de centros quirais em cada molécula;
c) Identifique todos os pares enantioméricos e os compostos meso, se presentes.

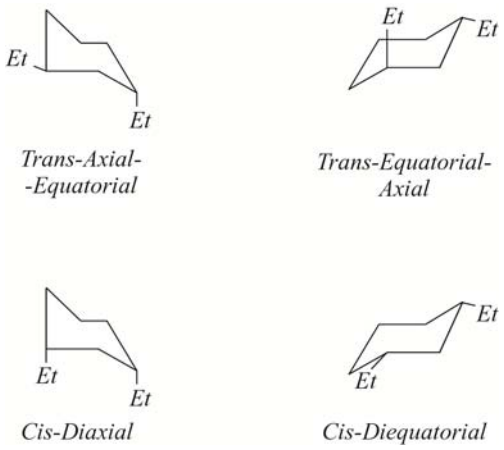
Comentário:

a) Os compostos 1,3-dietilcicloexano e 1,4-dimetilcicloexano podem aparecer nas conformações barco e cadeira.

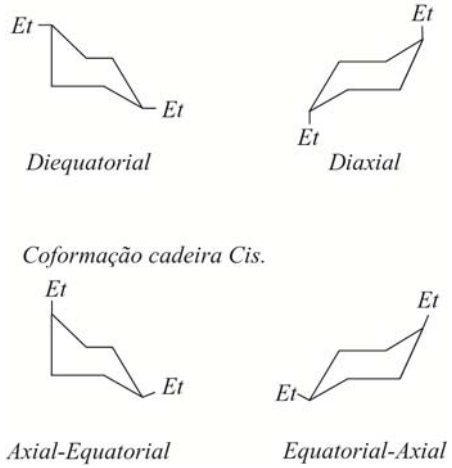


Na conformação barco as tensões torcionais podem ser aliviadas, em parte, resultando na conformação denominada de barco torcido.

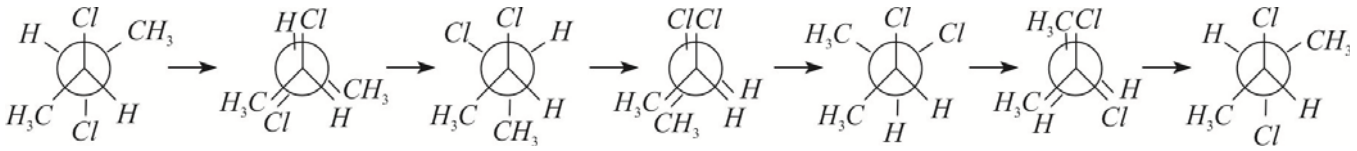
Para 1,3-dietilcicloexano



Pois 1,4-dimetilcicloexano



Para 2,3-diclorobutano:



Alternada-anti A → Eclipsada B → Alternada-gauche C → Eclipsada D → Alternada-gauche E → Eclipsada F → Alternada-anti G

Conformações do 2,3-Diclorobutano

Anti $\Rightarrow A \equiv G$

Alternadas ↗ ↘

Gauche $\Rightarrow B \equiv E$

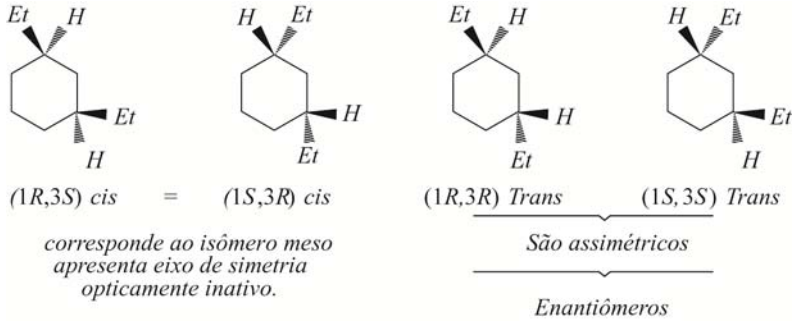
$B \equiv F$

Eclipsadas ↗ ↘

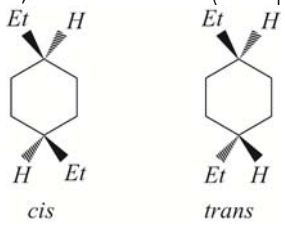
D

b) 1,3-dietilcicloexano $\Rightarrow$ Apresenta 2 centros quirais iguais.
1,4-dietilcicloexano $\Rightarrow$ não apresenta centros quirais,portanto não apresenta estereoisômeros ópticos.
2,3-diclorobutano apresenta 2 centros quirais iguais.

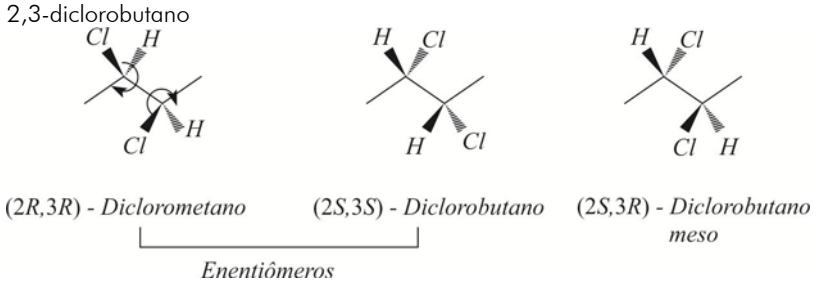
c)



1,4-dietilcicloexano (não apresenta isômeros ópticos)



2,3-diclorobutano



Nota: a questão faz referência às conformações na letra a e pede as configurações na letra c, entendemos que o texto traz dúvida ao aluno, pois não fica claro o comando da questão. Portanto, sugerimos anulação do item a. Considerando as alternativas b e c como respostas completas à questão.

Questão 08

Dicromato de potássio, enxofre e água reagem produzindo hidróxido de potássio, óxido de cromo III e dióxido de enxofre. Para oxidar $96\ g$ de enxofre, são utilizados 50% de dicromato de potássio em excesso. Sabendo que o rendimento da reação é de 80%, determine:

a) a equação balanceada da reação química;
b) a massa de dicromato de potássio utilizada;
c) a massa de dióxido de enxofre produzida.

Comentário:

a)

$$Cr_2O_7^{2-} + 6\ e^- + 4H_2O \rightarrow 1Cr_2O_3 + 8OH^- \qquad (x3)$$
$$S + 4OH^- \rightarrow SO_2 + 4e^- + 2H_2O \qquad (x2)$$

$$2Cr_2O_7^{2-} + \cancel{12e^-} + \cancel{8}H_2O \rightarrow 2Cr_2O_3 + \cancel{16}OH^-$$
$$3S + \cancel{12}OH^- \rightarrow 3SO_2 + \cancel{12e^-} + \cancel{6}H_2O$$

$$2Cr_2O_7^{2-} + 3S + 2H_2O \rightarrow 2Cr_2O_3 + 3SO_2 + 4OH^-$$

Logo:

$$2K_2Cr_2O_7 + 3S + 2H_2O \rightarrow 2Cr_2O_3 + 3SO_2 + 4KOH$$

b)

$$2K_2Cr_2O_7 _____ 3S$$
$$588,4\ g _____ \cancel{96}\ g$$
$$\frac{m_{total}}{1,5} _____ \cancel{96}\ g$$
$$m_{total} = 882,6\ g$$

c)

$$3S _____ 3SO_2$$
$$96\ g _____ 192 \cdot 0,8$$
$$96\ g _____ M_{SO2}$$
$$M_{SO2} = 153,6\ g$$

Questão 09

A produção de borrachas e espumas é comumente realizada pela síntese de poliuretanos. Para tal produção, a polimerização ocorre a partir de um poliol e um isocianato.

a) Apresente a(s) reação(ões) química(s) da polimerização e formação de poliuretano a partir de um diol e um diisocianato.

b) A água, quando presente no meio, gera reação(ões) paralela(s) e é determinante na produção de espumas. Apresente essa(s) reação(ões).

Comentário:

a)

$$n\ O{=}C{=}N{-}R{-}N{=}C{=}O \ + \ {}_2HO{-}CH_2{-}CH_2{-}OH \longrightarrow \left[\overset{O}{\overset{\|}{C}}{-}NH{-}R{-}NH{-}\overset{O}{\overset{\|}{C}}{-}O{-}CH_2{-}CH_2{-}O \right]_n$$

b)

$$R{-}N{=}C{=}O \ + \ HOH \longrightarrow R{-}NH_2 \ + \ CO_2$$

$$R{-}NH_2 \ + \ R{-}N{=}C{=}O \longrightarrow R{-}NH{-}\overset{O}{\overset{\|}{C}}{-}NH{-}R$$

A formação de CO_2 irá expandir a espuma e a formação da poliureia favorece aumento da rigidez devido às ligações de hidrogênio.

Questão 10

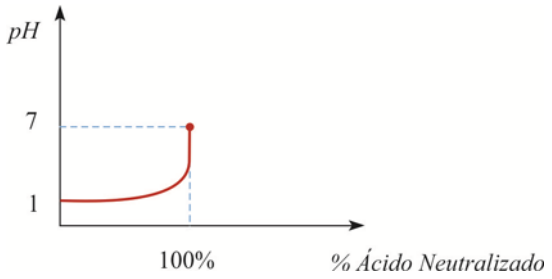
Considere a titulação de um ácido por meio da adição de uma base. Calcule o pH inicial e o pH no ponto de equivalência e construa a curva de titulação, ou seja, o gráfico do pH em função da porcentagem de ácido neutralizado. Apresente os cálculos realizados para os três casos. Dados eventualmente necessários: $\log 2 = 0,3;\ \sqrt{2} = 1,4;\ \log 1,4 = 0,14$.

a) Ácido forte ($HCl,\ 0,1\ mol\ L^{-1}$) com uma base forte ($NaOH,\ 0,1\ mol\ L^{-1}$);
b) Ácido forte ($HCl,\ 0,2\ mol\ L^{-1}$) com uma base fraca hipotética ($XOH,\ 0,2\ mol\ L^{-1};\ K_b(XOH) = 1,0 \cdot 10^{-5}$);
c) Ácido fraco hipotético ($HZ,\ 0,2\ mol\ L^{-1};\ K_a(HZ) = 1,0 \cdot 10^{-5}$) com uma base forte ($NaOH,\ 0,2\ mol\ L^{-1}$).

Comentário:

a) $HCl(aq) + NaOh(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_2O(l)$

Como a proporção do HCl para o $NaOH$ é de 1:1 e as concentrações são iguais, o PH no ponto de equivalência será 7.
Obs: O $NaCl$ não hidrolisa.



$PH_{Inicial} = -\log[H^+] = -\log(0,1) \therefore \boxed{PH_{Inicial} = 1}$

b)

$PH_{INICIAL} = -\log[H^+] = -\log(0,2)$

$PH_{INICIAL} = -\log(2) + [-\log(10^{-1})]$

$\boxed{PH_{INICIAL} = 0,7}$

$HCl(aq) + XOH(aq) \rightarrow XCl(aq) + H_2O(l)$

Sabendo que as concentrações são iguais, a $[XCL]$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$[XCL]_{EQUIVALÊNCIA} = \frac{0,2\ mol \cdot L^{-1} \cdot \cancel{V}}{2\cancel{V}}$$

$$\boxed{[XCL]_{EQUIVALÊNCIA} = 0,1 mol \cdot L^{-1}}$$

Obs: Usamos $2V$ pois o volume de equivalência, já que as concentrações são iguais, é o dobro do volume inicial.

Pode-se dizer também que $2V = V_{Ácido} + V_{Base}$.

O PH é calculado pela hidrólise do cátion, que vem de base fraca.

$X^+(aq) + H - OH \rightleftharpoons XOH(aq) + H^+(aq)$

$$kh = \frac{kw}{kb} = \frac{1 \cdot 10^{-14}}{1 \cdot 10^{-5}} = 1 \cdot 10^{-9}$$

$X^+(aq) + H - OH \rightleftharpoons XOH(aq) + H^+(aq)$

$0,1$	$-$	$-$	$-$
$0,1 - X$		X	X

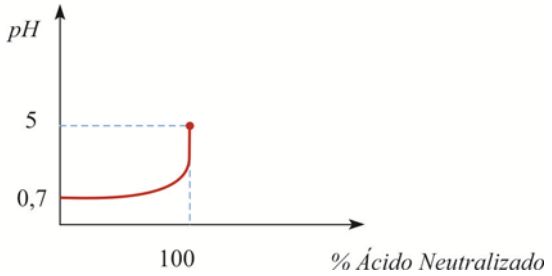
$$kh = \frac{[XOH] \cdot [H^+]}{[X^+]} = 1 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{X^2}{0,1 - \cancel{X}} = 1 \cdot 10^{-9} \therefore X^2 = 1 \cdot 10^{-10}$$

$X = 1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow X = [H^+]$

$PH_{EQUIVALÊNCIA} = -\log[H^+] = -\log(10^{-5})$

$PH_{EQUIVALÊNCIA} = 5$



c) O raciocínio usado na letra B é válido para cálculo do $PH_{INICIAL}$ é pela dissociação do ácido fraco.

$AZ(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + Z^-(aq)$

$0,2 \quad - \quad -$

$0,2 - X \quad X \quad X$

$$Ka = \frac{[H^+]\cdot[Z^-]}{[HZ]} = \frac{X^2}{0,2 - X^0} = 1\cdot 10^{-5}$$

$X^2 = 2\cdot 10^{-6} \therefore X = 1,4\cdot 10^{-3}$

$[H^+] = 1,4\cdot 10^{-3} n$

$PH_{Inicial} = -\log(1,4\cdot 10^{-3}) \therefore \boxed{PH_{Inicial} = 2,86}$

$HZ(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaZ(aq) + H_2O(l)$

O ânion sofrerá HIDRÓLISE:

$Z^-(aq) + H - OH(l) \rightleftharpoons HZ(aq) + OH^-(aq)$

$0,1 \quad - \quad - \quad -$

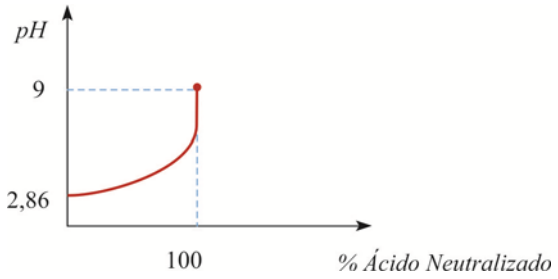
$0,1 - X \quad X \quad X$

$$kh = \frac{kw}{ka} = \frac{1\cdot 10^{-14}}{1\cdot 10^{-5}} = 1\cdot 10^{-9}$$

$$1\cdot 10^{-9} = \frac{X^2}{0,1} \therefore X = 1\cdot 10^{-5}$$

$X = [OH^-] = 1\cdot 10^{-5}$, logo

$[H^+] = 1\cdot 10^{-9} \therefore \boxed{PH_{EQUIVALÊNCIA} = 9}$



Professores

Química
Emanuel
Negri
Welson

Matemática
Kellem
Mateus

Colaborador
Murillo Margarida

Digitação e Diagramação
Igor Soares
Isabella Maciel

Revisor
Celso Faria

Desenhista
Rodrigo Ramos

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

Copyright©Olimpo2019

A Resolução Comentada das provas do ITA
poderá ser obtida diretamente no site do ***GRUPO OLIMPO****.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br